

NTMF036

INTERPRETACE KVANTOVÉ MECHANIKY

Skryté proměnné

Pavel Krtouš

Bellovy nerovnosti

J.S.Bell
 On the Einstein Podolsky Rosen Paradox
 Physics 1 (1964) 195

III.5 ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

JOHN S. BELL†

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

II. Formulation

With the example advocated by Bohm and Aharonov [6], the EPR argument is the following. Consider a pair of spin one-half particles formed somehow in the singlet spin state and moving freely in opposite directions. Measurements can be made, say by Stern-Gerlach magnets, on selected components of the spins $\vec{\sigma}_1$ and $\vec{\sigma}_2$. If measurement of the component $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$, where \vec{a} is some unit vector, yields the value $+1$ then, according to quantum mechanics, measurement of $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ must yield the value -1 and vice versa. Now we make the hypothesis (2), and it seems one at least worth considering, that if the two measurements are made at places remote from one another the orientation of one magnet does not influence the result obtained with the other. Since we can predict in advance the result of measuring any chosen component of $\vec{\sigma}_2$, by previously measuring the same component of $\vec{\sigma}_1$, it follows that the result of any such measurement must actually be predetermined. Since the initial quantum mechanical wave function does not determine the result of an individual measurement, this predetermination implies the possibility of a more complete specification of the state.

Let this more complete specification be effected by means of parameters λ . It is a matter of indifference in the following whether λ denotes a single variable or a set, or even a set of functions, and whether the variables are discrete or continuous. However, we write as if λ were a single continuous parameter. The result A of measuring $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ is then determined by \vec{a} and λ , and the result B of measuring $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ in the same instance is determined by \vec{b} and λ , and

*Work supported in part by the U.S. Atomic Energy Commission

†On leave of absence from SLAC and CERN

Originally published in *Physics*, 1, 195-200 (1964).

BELL

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1. \quad (1)$$

Article 2 does not depend on the setting \vec{a} , of the magnet or the expectation value of the product of the two com-

$$\rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (2)$$

tion value, which for the singlet state is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (3)$$

Hidden variables fall into two sets, with A dependent on \vec{a} and \vec{b} as above, since λ stands for any number of variables unrestricted. In a complete physical theory of the kind one would have dynamical significance and laws of motion; these variables at some suitable instant.

Illustration

Before giving it, however, a number of illustrations may

be given. A variable account of spin measurements on a single pure spin state with polarization denoted by a unit vector $\vec{\lambda}$ with uniform probability distribution over all directions, and the result of measurement of a component $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ is

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{a}. \quad (4)$$

If a way to be specified, and the sign function is ± 1 or ∓ 1 this leaves the result undetermined when $\vec{\lambda} \cdot \vec{a} = 0$, or one makes special prescriptions for it. Averaging over $\vec{\lambda}$ the

$$\langle \vec{\lambda} \cdot \vec{a} \rangle = 0. \quad (5)$$

Then that \vec{a}' is obtained from \vec{a} by rotation towards \vec{b}

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (6)$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{a} = \cos \theta \quad (7)$$

we view that the result of every measurement is determined by the statistical features of quantum mechanics arise because the

variables are discrete or continuous. However, we write as if λ were a single continuous parameter. The result A of measuring $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ is then determined by \vec{a} and λ , and the result B of measuring $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ in the same instance is determined by \vec{b} and λ , and

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1. \quad (1)$$

Article 2 does not depend on the setting \vec{a} , of the magnet or the expectation value of the product of the two com-

$$\rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (2)$$

tion value, which for the singlet state is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (3)$$

Hidden variables fall into two sets, with A dependent on \vec{a} and \vec{b} as above, since λ stands for any number of variables unrestricted. In a complete physical theory of the kind one would have dynamical significance and laws of motion; these variables at some suitable instant.

Before giving it, however, a number of illustrations may

be given. A variable account of spin measurements on a single pure spin state with polarization denoted by a unit vector $\vec{\lambda}$ with uniform probability distribution over all directions, and the result of measurement of a component $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ is

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{a}. \quad (4)$$

If a way to be specified, and the sign function is ± 1 or ∓ 1 this leaves the result undetermined when $\vec{\lambda} \cdot \vec{a} = 0$, or one makes special prescriptions for it. Averaging over $\vec{\lambda}$ the

$$\langle \vec{\lambda} \cdot \vec{a} \rangle = 0. \quad (5)$$

Then that \vec{a}' is obtained from \vec{a} by rotation towards \vec{b}

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (6)$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{a} = \cos \theta \quad (7)$$

we view that the result of every measurement is determined by the statistical features of quantum mechanics arise because the

405

(2), the only features of (3) commonly used

$$\left. \begin{aligned} -1 \\ 0 \\ 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

probability distribution over all directions, and take

$$\rho(\lambda) [1 - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (9)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = P(\vec{a}, \vec{c}) \quad (10)$$

and cannot equal the quantum mechanical

prediction (8). For comparison, consider the re-

placement in the course of time by an iso-

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (11)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

prediction (8). For comparison, consider the re-

placement in the course of time by an iso-

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (11)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

prediction (8). For comparison, consider the re-

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (11)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = P(\vec{a}, \vec{c}) \quad (10)$$

and cannot equal the quantum mechanical

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (11)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = P(\vec{a}, \vec{c}) \quad (10)$$

and cannot equal the quantum mechanical

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (11)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = P(\vec{a}, \vec{c}) \quad (10)$$

and cannot equal the quantum mechanical

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (11)$$

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

BELL

407

$$A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \quad (12)$$

$$A(\vec{a}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] \quad (13)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

$$A(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (14)$$

BELL

References

1. E. S. R. Phys. Rev. 47, 777 (1935); see also N. BOHR, *Ibid.* 48, 1476 (1936), and D. R. INGLIS, *Rev. Mod. Phys.* 33, 1 (1961).
2. J. S. BELL, *Phys. Rev. Lett.* 14, 214 (1965).
3. J. S. BELL, *Phys. Rev. Lett.* 14, 214 (1965).
4. J. S. BELL, *Phys. Rev. Lett.* 14, 214 (1965).
5. J. S. BELL, *Phys. Rev. Lett.* 14, 214 (1965).
6. J. S. BELL, *Phys. Rev. Lett.* 14, 214 (1965).

represented, either accurately or arbitrar-

small.

requires little imagination to envisage the

way, assuming [7] that any Hermitian opera-

tor is easily extended to other systems.

Thus 2 we can always consider two dimen-

sional spaces, \vec{a} and \vec{b} , formally analogous to those

subspace. Then for at least one quantum

mechanics to determine the results of individual

measurements there must be a mechanism whereby the set-

tings of the instruments are made suffi-

ciently by exchange of signals with velocity less

than c , of the type proposed by Bohm and Aharonov

particles, are crucial.

My useful discussions of this problem. The

University; I am indebted to colleagues there

for their helpful discussions.

of order $|\vec{b} - \vec{c}|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}|$. Thus $P(\vec{b}, \vec{c})$

and cannot equal the quantum mechanical

prediction (8). For comparison, consider the re-

placement in the course of time by an iso-

placement in the course of time by an iso-

John Stewart Bell

(1928–1990)



Teorie skrytých parametrů

⊙ úplný popis reality

$[|st\rangle, \lambda]$

- kvantový stav

$|st\rangle$

- skryté parametry

λ

⊙ skryté parametry determinují výsledky všech měření

- nedeterminismus měření je dán neznalostí skrytých parametrů
- pravděpodobnosti KM průměrováním přes skryté parametry

Teorie skrytých parametrů

- ⊙ průměrování přes skryté parametry

$$\langle \text{st} | \hat{A} | \text{st} \rangle = \int d\lambda a(|\text{st}\rangle, \lambda)$$

$a(|\text{st}\rangle, \lambda)$ je jednoznačná hodnota veličiny v úplném stavu $[|\text{st}\rangle, \lambda]$

EPR systém

- ⊙ měření *korelace*

levého spinu ve směru \vec{a} a pravého spinu ve směru \vec{b}

- ⊙ kvantová předpověď

$$k_{\text{KM}}(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(\angle \vec{a}\vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

- ⊙ teorie skrytých parametrů

$$k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

EPR systém

⊙ teorie skrytých parametrů

$$k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

- $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$ hodnota **levého spinu** ve směru \vec{a}
- $B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$ hodnota **pravého spinu** ve směru \vec{b}

EPR systém

⊙ teorie skrytých parametrů

$$k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

- $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$ hodnota **levého spinu** ve směru \vec{a}
- $B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$ hodnota **pravého spinu** ve směru \vec{b}

⊙ předpoklad lokality

- $A(\vec{a}, \lambda)$ hodnota **levého spinu** nezávisí na **pravém směru** \vec{b}
- $B(\vec{b}, \lambda)$ hodnota **pravého spinu** nezávisí na **levém směru** \vec{a}

Bellovy nerovnosti

- ⊙ antikorelace pro stejné směry \Rightarrow

$$A(\vec{o}, \lambda) = -B(\vec{o}, \lambda)$$

- ⊙ přímočará algebra \Rightarrow

$$1 + k_{\text{TSP}}(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) - k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{c}) \right|$$

Bellovy nerovnosti

- antikorrelace pro stejné směry \Rightarrow

$$A(\vec{0}, \lambda) = -B(\vec{0}, \lambda)$$

- přímočará algebra \Rightarrow

$$1 + k_{\text{TSP}}(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) - k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{c}) \right|$$

IV. Contradiction

The main result will now be proved. Because ρ is a normalized probability distribution,

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1, \quad (12)$$

and because of the properties (1), P in (2) cannot be less than -1 . It can reach -1 at $\vec{a} = \vec{b}$ only if

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \quad (13)$$

except at a set of points λ of zero probability. Assuming this, (2) can be rewritten

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda). \quad (14)$$

It follows that \vec{c} is another unit vector

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

using (1), whence

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]$$

The second term on the right is $P(\vec{b}, \vec{c})$, whence

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \quad (15)$$

Bellovy nerovnosti

⊙ předpověď lokální teorie skrytých parametrů splňuje:

$$1 + k_{\text{TSP}}(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) - k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{c}) \right|$$

Bellovy nerovnosti

- ⊙ předpověď lokální teorie skrytých parametrů splňuje

$$1 + k_{\text{TSP}}(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) - k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{c}) \right|$$

- ⊙ předpověď kvantové mechaniky nerovnost nesplňuje

$$k_{\text{KM}}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Bellovy nerovnosti

- ⊙ předpověď lokální teorie skrytých parametrů splňuje

$$1 + k_{\text{TSP}}(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{b}) - k_{\text{TSP}}(\vec{a}, \vec{c}) \right|$$

- ⊙ předpověď kvantové mechaniky nerovnost nesplňuje

$$1 - \vec{b} \cdot \vec{c} \geq \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \right| \quad \text{neplatí např. pro } (\vec{b} - \vec{c}) = \epsilon \vec{a}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})^2 \geq \epsilon |\vec{a} \cdot \vec{a}|$$

$$\frac{1}{2}\epsilon^2 \geq \epsilon$$

ale pro $\epsilon < 2$

spor

$$k_{\text{KM}}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

Bellovy nerovnosti

- ⊙ *kvantová mechanika není ekvivalentní lokální teorii skrytých parametrů*
- ⊙ *experimentální testy nerovností potvrzují předpověď kvantové mechaniky*

Kvantové strategie pro nelokální hry

(příběhy ze života *Alice* a *Boba*)

Kvantové strategie pro nelokální hry

- ⦿ základní axióm kvantové informace:

*Pokud úloha zahrnuje dvě zúčastněné strany,
jedna se jmenuje **Alice** a druhá **Bob**.*

(Ve výjimečných případech tomu může být naopak.)

Distribuce hesla

dvě agentury distribující hesla (± 1) pro příchozí agenty

Alice

Bob

dvě organizace agentů

světlá strana

temná strana

do každé z agentur přijde agent, který prokáže svoji příslušnost

úkolem agentur je dát agentům hesla podle *požadovaných* podmínek

Distribuce hesla

úloha I

úkolem agentur je dát agentům ze stejné organizace stejné heslo a agentům z různých organizací různá hesla

Distribuce hesla

úloha I

úkolem agentur je dát agentům ze stejné organizace stejné heslo a agentům z různých organizací různá hesla

strategie distribuce hesel

Alice

světlý → +1
temný → -1

Bob

světlá → +1
temná → -1

zaručuje 100% úspěšnost distribuce hesel

Distribuce hesla

úloha II

úkolem agentur je dát agentům ze světlé strany stejné heslo,
ve všech ostatních případech hesla různá

Distribuce hesla

úloha II

úkolem agentur je dát agentům ze světlé strany stejné heslo,
ve všech ostatních případech hesla různá

příklad klasické strategie distribuce hesel

Alice

Bob

světlý → +1
temný → náhodně

světlá → +1
temná → náhodně

zaručuje 62.5% úspěšnost distribuce hesel

Distribuce hesla

úloha II

úkolem agentur je dát agentům ze světlé strany stejné heslo,
ve všech ostatních případech hesla různá

příklad klasické strategie distribuce hesel

Alice

Bob

světlý → +1

světlá → +1

temný → -1

temná → -1

zaručuje 75% úspěšnost distribuce hesel

$$p(\alpha\beta | a b) \quad a, b = S, T \quad \alpha, \beta = \pm$$

$$p(= | a, b) = p(++ | a, b) + p(-- | a, b)$$

$$p(\neq | a, b) = p(+ - | a, b) + p(- + | a, b)$$

$$p(\text{úspěch}) = p(= | SS) p(SS) + p(\neq | ST) p(ST) + p(\neq | TS) p(TS) + p(\neq | TT) p(TT)$$

$$p(a, b) = p(a) p(b) = \frac{1}{4}$$

$$e(a, b) = p(= | a, b) - p(\neq | a, b)$$

$$p(= | a, b) = \frac{1 + e(a, b)}{2}$$

$$1 = p(= | a, b) + p(\neq | a, b)$$

$$p(\neq | a, b) = \frac{1 - e(a, b)}{2}$$

$$e(a, b) = \sum_{\alpha, \beta} \alpha \beta p(\alpha\beta | a, b)$$

$$p(\text{úspěch}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \underbrace{\left[-e(TT) - e(ST) - e(TS) + e(SS) \right]}_{\leq 2 \text{ CHHS}} \leq \frac{3}{4}$$

Clauser-Holt-Horne-Shimony nerovnost

Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 880

$$e(a, b) = \sum_{\alpha, \beta = \pm} \alpha \beta p(\alpha, \beta | a, b)$$

$a, b = S, T$

realismus: $p(\alpha, \beta | a, b) = \int p(\alpha, \beta | a, b; \lambda) d\lambda$

lokalita: $p(\alpha, \beta | a, b; \lambda) = p(\alpha | a; \lambda) p(\beta | b; \lambda)$

\Downarrow

$$|e(T, T) + e(S, T) + e(T, S) - e(S, S)| \leq 2$$

Distribuce hesla

úloha II

úkolem agentur je dát agentům ze světlé strany stejné heslo,
ve všech ostatních případech hesla různá

klasické strategie distribuce hesel

lokální strategie může dosáhnout maximálně 75% úspěšnost

Distribuce hesla

úloha II

úkolem agentur je dát agentům ze světlé strany stejné heslo,
ve všech ostatních případech hesla různá

příklad kvantové strategie distribuce hesel

Alice

Bob

$|EPR\rangle$

světlý → výsledek měření ↙

temný → výsledek měření ↗

světlá → výsledek měření →

temná → výsledek měření ↑

zaručuje ~85% úspěšnost distribuce hesel

$$\hat{P}_{A\alpha}[\vec{a}] = \frac{1}{2} (\hat{1} + \alpha \hat{G}_A[\vec{a}])$$

$$\hat{P}_{B\beta}[\vec{b}] = \frac{1}{2} (\hat{1} + \beta \hat{G}_B[\vec{b}])$$

$$\hat{P}_=[\vec{a}, \vec{b}] = \hat{P}_{A+}[\vec{a}] \hat{P}_{B+}[\vec{b}] + \hat{P}_{A-}[\vec{a}] \hat{P}_{B-}[\vec{b}] = \frac{1}{2} (\hat{1} + \hat{G}_A[\vec{a}] \hat{G}_B[\vec{b}])$$

$$\hat{P}_+[\vec{a}, \vec{b}] = \hat{P}_{A+}[\vec{a}] \hat{P}_{B-}[\vec{b}] + \hat{P}_{A-}[\vec{a}] \hat{P}_{B+}[\vec{b}] = \frac{1}{2} (\hat{1} - \hat{G}_A[\vec{a}] \hat{G}_B[\vec{b}])$$

$$\hat{E}[\vec{a}, \vec{b}] = \hat{P}_=[\vec{a}, \vec{b}] - \hat{P}_+[\vec{a}, \vec{b}] = \hat{G}_A[\vec{a}] \hat{G}_B[\vec{b}]$$

$$p(\alpha\beta|ab) = \langle \hat{P}_{A\alpha}[\vec{a}_a] \hat{P}_{B\beta}[\vec{b}_b] \rangle_{EPR}$$

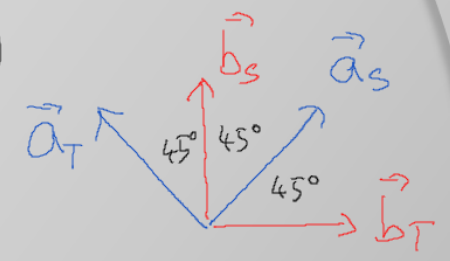
$$p(=|ab) = \langle \hat{P}_=[\vec{a}_a, \vec{b}_b] \rangle_{EPR} = \frac{1 + e(a,b)}{2} = \frac{1 - \cos \theta(a,b)}{2}$$

$$p(\neq|ab) = \langle \hat{P}_+[\vec{a}_a, \vec{b}_b] \rangle_{EPR} = \frac{1 - e(a,b)}{2} = \frac{1 + \cos \theta(a,b)}{2}$$

$$e(a,b) = \langle \hat{E}[\vec{a}_a, \vec{b}_b] \rangle_{EPR} = \langle \hat{G}_A[\vec{a}_a] \hat{G}_B[\vec{b}_b] \rangle_{EPR} = -\vec{a}_a \cdot \vec{b}_b = -\cos \theta(a,b)$$

$$|\vec{a}_a| = 1$$

$$|\vec{b}_b| = 1$$



Distribuce hesla

Alice

Bob

$|EPR\rangle$

$$p_{=} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$
$$p_{\neq} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

agent	agent	měření	θ	úkol	$p_{\text{úspěch}}$
světlý	světlá	$\nwarrow \rightarrow$	135°	=	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$
světlý	temná	$\nwarrow \uparrow$	45°	\neq	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$
temný	světlá	$\nearrow \rightarrow$	45°	\neq	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$
temný	temná	$\nearrow \uparrow$	45°	\neq	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$

úspěšnost distribuce hesel: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 85\%$

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

Alice

	+		
	-		
	-		
	-		

-

Alice dostane zadaný sloupec
má ho doplnit \pm tak aby součin byl -

Bob

+	-	-	+

+

Bob dostane zadaný řádek
má ho doplnit \pm tak aby součin byl +

úkolem je shodnout se v buňce na průsečíku

např.: P. K. Aravind, Am. J. Phys. 72 (2004) 1303

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

Alice

Bob

řešení

dopředu si dohodnout předvyplněný čtverec splňující podmínky

součin v sloupci –

+	+	-	-
+	-	-	+
+	-	-	+
-	-	+	+

- - - -

součin v řádce +

+	+	-	-	+
+	-	-	+	+
+	-	-	+	+
-	-	+	+	+

úkolem je shodnout se v buňce na průsečíku

úspěšnost je s jistotou zaručena

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

Alice

Bob

čtverec 3×3

dopředu si dohodnout předvyplněný čtverec splňující podmínky

součin v sloupci –

+	+	+
–	–	+
+	+	x

– – x

$x = ?$

součin v řádce +

+	+	+	+
–	–	+	+
+	+	x	x

úplná úspěšnost nelze zajistit

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

čtverec 3×3 – kvantová varianta

⊙ pozorovatelné pro spiny v kolmých směrech

- $|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle \quad \hat{\sigma}_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$
- $|\odot\rangle \quad |\otimes\rangle \quad \hat{\sigma}_x = |\odot\rangle\langle\odot| - |\otimes\rangle\langle\otimes|$
- $|\rightarrow\rangle \quad |\leftarrow\rangle \quad \hat{\sigma}_y = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| - |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

$$|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

(jiná konvence směrů než dříve)

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

čtverec 3 × 3 – kvantová varianta

⊙ pozorovatelné pro spiny v kolmých směrech

- $|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle \quad \hat{\sigma}_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$
- $|\odot\rangle \quad |\otimes\rangle \quad \hat{\sigma}_x = |\odot\rangle\langle\odot| - |\otimes\rangle\langle\otimes|$
- $|\rightarrow\rangle \quad |\leftarrow\rangle \quad \hat{\sigma}_y = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| - |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

⊙ platí

- $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{\mathbb{1}}$
- $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z \quad \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x \quad \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_y$
- $\hat{\sigma}_x \quad \hat{\sigma}_y \quad \hat{\sigma}_z$ spolu nekomutují – nelze měřit zároveň

$$|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

(jiná konvence směrů než dříve)

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

předvyplněný čtverec kvantovými pozorovatelnými splňující podmínky

Alice i Bob budou mít 2 spiny:

horní

\otimes

dolní

pro každý spin jedna sada
pozorovatelných

v každém řádku a sloupci pozorovatelné komutují

		součin v řádku +				
součin v sloupci -	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\sigma}_z$	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$
	$\hat{\sigma}_z$	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$
	$\hat{\sigma}_z$	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$
	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\sigma}_z$	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$
	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\sigma}_z$	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$
	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\sigma}_z$	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$
	$\hat{\mathbb{1}}$	$\hat{\mathbb{1}}$	$\hat{\mathbb{1}}$	$-\otimes$	$\hat{\mathbb{1}}$	$\hat{\mathbb{1}}$

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

Alice

$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$-\otimes$	$-\otimes$	$-\otimes$	
$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	

Bob

$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z$	$\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$
$-\otimes$	$-\otimes$	$-\otimes$	
$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	$\hat{1} \otimes \hat{1}$	

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

stav – dvojitý EPR stav

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|EPR\rangle \otimes |EPR\rangle \right)$$

Alice a **Bob** provedou měření pozorovatelných v zadaných **sloupci** a **řádku**

(lze, protože pozorovatelné komutují)

výsledky vyplní do sloupce a řádku

(podmínky jsou splněny díky platnosti pro pozorovatelné)

na průsečíku se výsledek bude vždy shodovat

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

stav – dvojitý EPR stav

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|EPR\rangle \otimes |EPR\rangle \right)$$

součin pozorovatelných na průsečíku zadaného řádku a sloupce

$$\begin{array}{c} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_i \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_j \end{array}$$

EPR antikorelace jak pro horní, tak dolní částici

$$\left\langle S \left| \begin{array}{c} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_i \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_j \end{array} \right| S \right\rangle = \begin{array}{c} -1 \\ \times \\ -1 \end{array} = 1$$

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

3×3 hru lze díky kvantovým korelacím vyhrát vždy

opět

netrivialita kvantového chování